ТЕОРІЯ І АЛГОРИТМИ ЗНАХОДЖЕННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Кухаренко А.В,. Філєр З.Ю.

VI-курс, фізико-математичний факультет

Філєр З.Ю., доктор технічних наук, кандидат ф.-м. наук, професор

Центрально-український державний педагогічний університет

імені Володимира Винниченка

м. Кропивницький

Протягом 70-80 рр. XX стор. автор з учнями розробив методи фінітизації побудови годографа Михайлова лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь для вивчення їх стійкості. У 90-ті роки результати перенесені на рівняння з ланками запізнення та рівняння з періодичними коефіцієнтами і запізненнями. Вони були присвячені встановленню *асимптотичної* стійкості та нестійкості. Фінітизація досягалася введенням нового аргументу та нової функції - характеристичного многочлену, які змінюються в скінченних інтервалах на нескінченій площині. Основні результати опубліковані в 2006 – 2007 рр. У 2006 – 2014 рр. результати втілені в навчальний процес; використовуються створені відповідні «Методичні вказівки» обсягом 104 стор. У 2014 р. запропонована фінітизація самої площини разом із годографом.

У 2015 – 2016 рр. розглянута класична проблема центру – фокусу, поставлена ще у 80-ті роки XIX стор. А.Пуанкаре. Встановлена достатня умова *центру*, яка гарантує *неасимптотичну* стійкість розв'язків *нелінійних* автономних рівнянь другого порядку. При цьому відповідні рівняння першого порядку мають лінійні члени, які забезпечують *центр*, та нелінійні члени, які є *гармонічними* функціями – розв'язками рівняння Лапласа. Вони побудовані з «атомів» - дійсних та уявних частин степенів комплексної змінної [2]. У 2016 р. реалізовано використання функції *комплексної* змінної для побудови відповідних фазових портретів та її реальної частини для побудови графіків розв'язків. Результати доповідалися на міжвузівському семінарі в жовтні – листопаді 2016 р. і готуються до друку в працях КДПУ. Планується перенести методи і результати на неавтономні системи з декількома степенями свободи.

Розроблені алгоритми і програми використовують сучасні математичні пакети типу *Mathematika*. Вони ілюструють ситуацію і дають відповідні кількісні характеристики (кут повороту радіус-вектору, амплітуди і частоти коливань тощо). Отримані та розроблювані результати можуть бути застосовані для аналізу коливань та стійкості реальних машин і технологічних процесів.

У весінньому семестрі 2016 – 2017 навчального року в курсі «Моделювання динамічних систем» викладався важливий розділ «Стійкість лінійних систем». У ньому викладався метод Михайлова; студенти виконували побудову годографа Михайлова для лінійних систем із запізненнями виду

$$y^{(n)}(t)+\sum_{k=1}^{n}\left[a_{n-k}y^{(n-k)}(t)+\sum_{j=1}^{n}\left(b_{n-k,j}y^{(n-k)}\left(t-\tau_{n-k,j}\right)\right)\right]=0,$$

які мають характеристичне рівняння

$$f(\lambda)\equiv\lambda^{n}+\sum_{k}\lambda^{n-k}\left(a_{n-k}+\sum_{j}b_{n-k,j}e^{-\lambda\tau_{n-k,j}}\right)=0.$$

Тут коефіцієнти $a_j>0, b_j, \tau_j \geq 0$ - сталі [1].

Студентам пропонувалося розробити *універсальну* програму, яка дозволяла би будувати фінітизований годограф або рахувати кут його повороту і в разі рівності його $n\pi/2$ видавати повідомлення «система стійка»; якщо ж він менше $n\pi/2$ - то «система нестійка».

Програма написана мовою програмування JavaScript і може працювати у будь-якому браузері.

Алгоритм роботи:

1. Програма запитує: «Введіть порядок рівняння – n»;
2. «Введіть коефіцієнти $a_j>0, b_j>0, \tau_j>0$»;

3. Для заданих коефіцієнтів програма будує вирази

$$u(t) = t^0(1-t)^n\left(a_0 + b_0 cos\frac{\tau_0 t}{1-t}\right) + t(1-t)^{n-1}\left(b_1 \sin\left(\frac{\tau_1 t}{1-t}\right)\right) -$$

$$-\left(t^2(1-t)^{n-2}\left(a_2 + b_2 cos\frac{\tau_2 t}{1-t}\right) + t^3(1-t)^{n-3}\left(b_3 \sin\left(\frac{\tau_3 t}{1-t}\right)\right)\right) + \cdots$$

$$v(t) = \left(t^n(1-t)^0\left(a_n + b_n cos\tfrac{\tau_n t}{1-t}\right) - t^{n-1}(1-t)^1\left(b_{n-1} \sin\left(\tfrac{\tau_{n-1} t}{1-t}\right)\right)\right) -$$

$$-\left(t^{n-2}(1-t)^2\left(a_{n-2} + b_{n-2} cos\tfrac{\tau_{n-2} t}{1-t}\right) - t^{n-3}(1-t)^3\left(b_{n-3} \sin\left(\tfrac{\tau_{n-3} t}{1-t}\right)\right)\right) + \cdots$$

Шукає похідні $u'(t)$ і $v'(t)$, та квадрати $u^2(t)$ і $v^2(t)$;

4. Обчислює дріб $\Phi(1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i(t)v_i'(t) - v_i(t)u_i'(t)}{u_i^2(t) + v_i^2(t)}$, де $0 \le t < 1$, для кожного t послідовно додаючи отримане значення до попереднього із кроком $\Delta t_i = 1/5n$
5. Отриману суму множить на Δt_i, оскільки вона однакова $\forall i$, і ділить на $\pi/2$, для того, щоб результат порівнювати з n.
6. Вираз $\frac{2\cdot\Phi(1)}{\pi}$ порівнюється з n, якщо $\frac{2\cdot\Phi(1)}{\pi} = n$ виводить повідомлення «Система стійка», в іншому випадку – «Система не стійка».

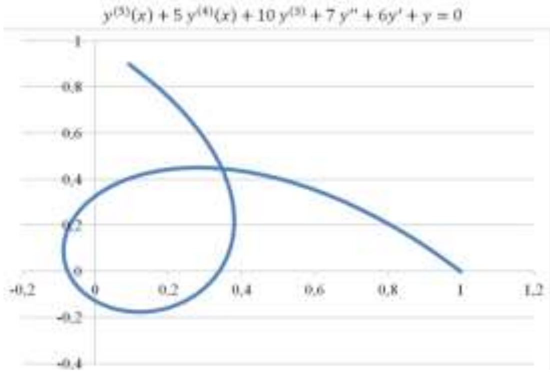

Рис.1. Годограф стійкої системи

Для демонстрації роботи програми було обрано приклад, в якому можна побачити як введення коефіцієнтів $b_j, \tau_j, j = 0..n$ впливає на стійкість системи.

Розглянемо диференціальне рівняння без запізнень, тобто $b_j = 0, \tau_j = 0$,

$$y^{(5)}(x) + 5\,y^{(4)}(x) + 10\,y^{(3)}(x) + 7\,y''(x) + 6y'(x) + y(x) = 0$$

Отже у програму необхідно ввести такі коефіцієнти: $n = 5;\ a_0 = 1$, $a_1 = 6, a_2 = 7, a_3 = 10, a_4 = 5, a_6 = 1; b_0 = b_1 = \cdots = b_5 = 0;\ \tau_0 = \cdots = \tau_5 = 0$.

В результаті проведених обчислень знайдено кут повороту годографа $\frac{2\cdot\Phi(1)}{\pi} = 5{,}005$, що практично дорівнює $n = 5$.

Отже система розв’язків є стійкою (це видно по годографу на рис.1., що перетинає всі чверті площини). Результат роботи програми наведений на рис. 2.

Наступним етапом спробуємо вводити коефіцієнти $b_j, \tau_j, j = 0..5$

При введені $b_0 > 1, \tau_0 > 0{,}3$, або $b_1 > 1{,}9, \tau_1 > 0{,}35$, або$b_1 > 1{,}9, \tau_1 > 0{,}35$ система починає втрачати стійкість (рис.3.)

При введені $0 < b_2 < 13;$ $0 < \tau_2 < 0{,}1$ або $0 < b_3 < 13; 0 < \tau_3 < 0{,}1$ система залишається стійкою.

При введені $b_4 > 0{,}715, \tau_4 > 0{,}1$, стійкість системи тільки збільшується $\left(\frac{2 \cdot \Phi(1)}{\pi} = 5{,}0003\right)$

Перевіривши багато комбінацій $b_j, \tau_j, j = 0..5$ дійшли висновку що найбільш стійкою виявиться система розв'язків такого диференціального рівняння із запізненням:

$$y^{(5)}(x) + 5\,y^{(4)}(x) + 0{,}715 y^{(4)}(x - 0{,}1)$$
$$+10\,y^{(3)}(x) + 7\,y''(x) + y''(x - 0.1)$$
$$+6y'(x) + y(x) = 0,$$

Підставляючи коефіцієнти у програму отримуємо результат «Система стійка» (рис. 4)

Рис.2. Інтерфейсстійкої системи

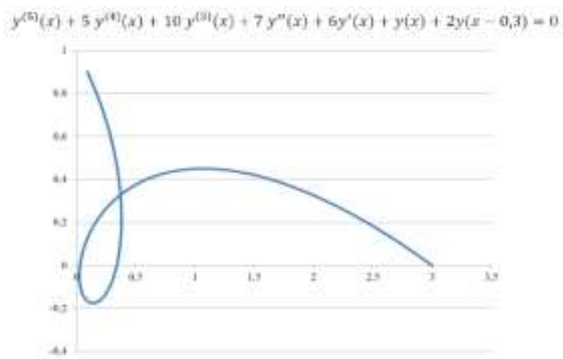

Рис.3. Годограф нестійкої системи

Рис.4. Інтерфейс стійкої системи із затримкою

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Філер З.Ю Стійкість лінійних систем / Філер З.Ю., Музиченко О.І., Шелуденко А.С. – Кіровоград: КДПУ, - 2015. – 104 с.

2. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. Математические основы теории автоматического регулирования. — М.: Высшая школа, 1971. — 808 с.